非教科書的な $\sum_{k=1}^{n} k^j (j = 2, 3, 4)$ の証明

おおいし ひでつぐ

2022 年 6 月 17 日

1　はじめに

二乗の和の公式の証明で、教科書やインターネットで紹介されているものとしては、

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1 \tag{1}$$

が任意の k で成り立っていることを利用して、両辺の $k = 1.....n$ の和をとることで導くものだと思われる。

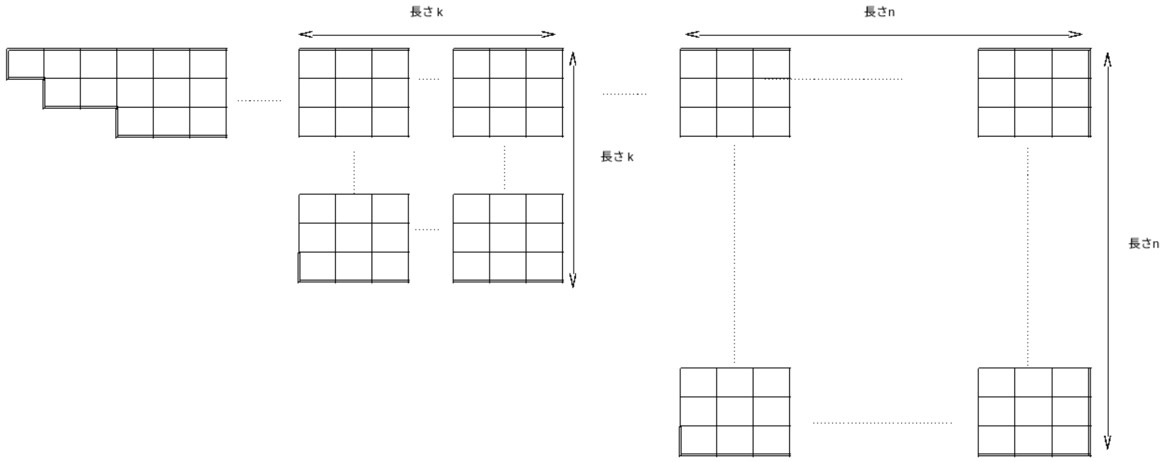
この証明は、間の式が次々と消えていくなど、無駄の無いエレガントな証明で、高次の場合でも容易に適用できるものである。数学的センスの無い私にとっては、上記のような当初の式を置く発想がなく、他の証明ができないか考えていた。

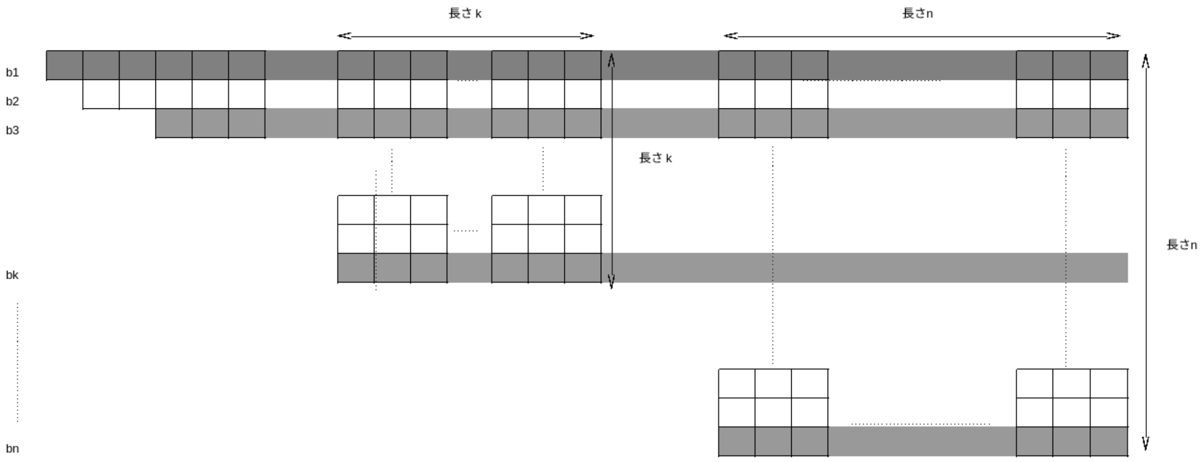
迂遠だが、少しだけ直感的な証明と言えるもので証明ができたので、紹介したい。

2　$\sum_{k=1}^{n} k^2$ の証明

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ とする k^2 は、一辺が長さ k の正方形の面積である。つまり、S_n は、一辺の長さが 1 ずつ大きくなる正方形の面積の合計ということになる。図的には次のようになる。

この階段状の面積の合計が二乗の和の合計となるが、この時、階段を横に切って、高さ 1 の長方形を足し合わせることを考える。図で表わすと次のようになる。





図にあるように、横長の短冊の面積を $b_1, b_2, ..., b_n$ と定義する。つまり、

$b_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k + (k+1) \cdots + (n-1) + n$

$b_2 = \quad 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k + (k+1) \cdots + (n-1) + n$

$b_3 = \quad 3 + \cdots + (k-1) + k + (k+1) \cdots + (n-1) + n$

$b_k = \quad k + (k+1) \cdots + (n-1) + n$

$b_n = n$

従って、一般項 b_k は,

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{k-1} j \qquad (2) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}(k-1)(k-1+1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}k(k-1) \tag{3}$$

となる。なお、(2) においては、$k=1$ が定義できていない。b_1 だけ別で定義し、導出された一般項 b_k の式 (3) が b_1 と無矛盾であることをもって、$k=1$ を含めた一般項とする。求めたいものは、この b_k の n 項までの和だったので、$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ を求めればよい。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}n(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}k(k-1) \\ &= \frac{1}{2}n^2(n+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、求めたい式である $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ が出現する。左辺もそもそも S_n であったので、これをそれぞれ S_n とおいて整理する。

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n^2(n+1) - \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k \\ \frac{3}{2}S_n &= \frac{1}{2}n^2(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k \\ 3S_n &= n^2(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ 3S_n &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) \\ S_n &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned} \tag{5}$$

と、お馴染みの公式に無事だどりつく。証明の途中で、S_n が出現するということは、再帰的ということか。もう一つは、証明には $\sum_{k=1}^{n} k$ の一般式 (公式) が既知であることが必要ということが分かる。

3 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ の証明

立体の図は難しいので、別の観点で同じことを行なう。

k^2 の和を求めたいと思ったときに考えたことは、足し合わせる次数を下げたいということだった。ならば単位 1 に分解すれば実現するのではないか、という発想

だった。実際 k^2 の和の公式の導出で行なったことは、

$$k^2 = (1 + 1 + \cdots + 1) \cdot k \tag{6}$$

と分解して, 足しあわせる順序を変えているのと同じである。k^3 についても同様に考える。つまり、$2^3 = (1+1) \cdot 2^2 = 2^2 + 2^2$、$3^3 = (1+1+1) \cdot 3^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2$ という風に考える。

これまでと同様に、$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ とし、また $a_k = k^3$ とする。分解した各 a_k の項を縦に並べて表にまとめると次のようになる。

	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_n
	1^3	2^3	3^3	$\cdots$	k^3	$\cdots$	n^3
b_1	1^2	2^2	3^2	$\cdots$	k^2	$\cdots$	n^2
b_2		2^2	3^2	$\cdots$	k^2	$\cdots$	n^2
b_3			3^2	$\cdots$	k^2	$\cdots$	n^2
$\cdots$				$\cdots$	k^2	$\cdots$	n^2
b_k					k^2	$\cdots$	n^2
$\cdots$						$\cdots$	n^2
b_n							n^2

ここで、b_k を表の各行の横の合計として定義する。改めて、$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$ であることに留意する。一般項 b_k は k^2 と同様に

$$\begin{aligned}
b_k &= \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{k-1} j^2 \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}(k-1)(k-1+1)(2(k-1)+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}k(k-1)(2k-1)
\end{aligned}$$

となる。

k^2 と同様に証明する。

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6}k(k-1)(2k-1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-3k+1) \\
&= \frac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3-3k^2+k) \\
&= \frac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1) - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k
\end{aligned}
$$

ここで、求めたい式である $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ が出現する。左辺もそもそも S_n であったので、これをそれぞれ S_n とおいて整理する。

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1) - \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k \\
\frac{4}{3}S_n &= \frac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\
16S_n &= 2n^2(n+1)(2n+1) + n(n+1)(2n+1) - n(n+1) \\
16S_n &= n(n+1)(2n(2n+1) + (2n+1) - 1) \\
16S_n &= n(n+1)(4n^2+2n+2n+1-1) \\
16S_n &= n(n+1)4(n^2+n) \\
16S_n &= 4n^2(n+1)^2 \\
S_n &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

と、同様に公式を導くことができた。証明の途中で、S_n が出現する点と、証明にはより次数の低い $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 及び $\sum_{k=1}^{n} k$ の一般式が既知であることが必要という点は共通している。

4 $\sum_{k=1}^{n} k^4$ の証明

ここまでくれば、同様に k^4 も証明できるであろうことが推測できる。$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$、$b_k = \sum_{j=1}^{n} k^3 - \sum_{j=1}^{k-1} k^3$ としたとき、k^2、k^3 と同様の議論から、$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ であることが容易に分かる。一般項 b_k は、同様に

$$
\begin{aligned}
b_k &= \sum_{j=1}^{n} j^3 - \sum_{j=1}^{k-1} j^3 \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{4}(k-1)^2(k-1+1)^2
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{4}k^2(k-1)^2 \tag{8}$$

同様に

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}k^2(k-1)^2 \\
4S_n &= n^3(n+1)^2 - \sum_{k=1}^{n}k^2(k^2-2k+1) \\
4S_n &= n^3(n+1)^2 - \sum_{k=1}^{n}k^4 + 2\sum_{k=1}^{n}k^3 - \sum_{k=1}^{n}k^2
\end{aligned}
$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$ であったので

$$
\begin{aligned}
5S_n &= n^3(n+1)^2 + 2\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
30S_n &= 6n^3(n+1)^2 + 3n^2(n+1)^2 - n(n+1)(2n+1) \\
30S_n &= n(n+1)(6n^2(n+1) + 3n(n+1) - (2n+1)) \\
30S_n &= n(n+1)(6n^3 + 6n^2 + 3n^2 + 3n - 2n - 1) \\
30S_n &= n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) \\
30S_n &= n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1) \\
S_n &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

と公式を導出することができた。証明の途中で、S_n が出現する点と、証明には、より次数の低い $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 及び $\sum_{k=1}^{n} k^2$ の一般式が既知であることが必要という点は共通している。