経済学における弾力性の技術的なノート：(１) 弾力性とグラフの傾きの関係

大石英嗣
経済学・社会学研究会

2025 年 10 月 17 日

1　本ノートの目的

本ノートの目的は、弾力性について既に判明している知識について、より分かりやすく整理することにある。弾力性については、高等学校の教科書である諸富他 [18, p 92] などでも紹介され、多くの初級または中級のミクロ経済学で概念・定義が説明され、消費理論、生産理論、独占市場などの理論等へ応用がされているが、数学的には難しい概念ではないにも関わらず、グラフの傾きと弾力性の関係性について理解が不十分であったため、整理した。

価格弾力性などについては、多くの実証分析がされているため、単にミクロ経済学の理論上の概念というだけでなく、実際の経済活動を具体的に把握する場面においても活躍している概念である。反面、弾力性は、ミクロ経済学の教科書上の概念のうち、グラフや直感だけでは誤った理解をする可能性のある概念の一つでもある。

小山 [10, p 560] で、数理経済学元年とでも言うべき 1937 年の J. フォン ノイマンの成長モデルの論文の節でも述べられているように、経済現象を数式で表現することの本質は、単に現象の記号による置き換えではなく、それによって、必ずしも直感的ではない数学的な展開の果てに帰結する主張に、文章やグラフではたどり着けない内容が含まれているからであると考えられる。その意味で、弾力性という概念は、一見すると簡単な定義だが、経済学の導入部で初めて出会う、あまり直感的で

はなく、グラフだけでは理解できず、より数理的な概念の一つと言っても良いのではないだろうか。

なお、López・Francisco [3, p 156] によると、Marshall[15, BOOK III, CHAPTER III,ELASTICITY OF DEMAND., p 162][1)]によって、弾力性概念が導入されたとされている。同書には、グラフによる解説もされており、現在のミクロ経済学の教科書に掲載されているような理解を助ける, 弾力性を説明したグラフも既に見られる。また、弾力性 (elasticity) のことを括弧書きで感応性 (responsiveness) としており、現在もなお、感応性と言い替えている場面があるのはこのためだと思われる。

2　離散的データによる定義と応用

2.1　２点間のグラフの傾きでは感応度を代表できない理由

ミクロ経済学または価格理論における弾力性 (elasticity) の概念には、需要の価格弾力性、供給の価格弾力性、需要の所得弾力性などがあるが、基本的には、数量的に把握できるある項目数量と別の項目の数量との間に何らかの関係性があり、

$$\frac{\dfrac{(\text{別の数量の変化後の数量}) - (\text{別の数量の基準点の数量})}{(\text{別の数量の基準点の数量})}}{\dfrac{(\text{ある数量の変化後の数量}) - (\text{ある数量の基準点の数量})}{(\text{ある数量の基準点の数量})}}$$

または、同じことだが

$$\frac{(\text{別の数量のパーセント変化率})}{(\text{ある数量のパーセント変化率})}$$

と表現することが多い。具体的には、需要の弾力性の場合、

$$\frac{(\text{需要のパーセント変化率})}{(\text{価格のパーセント変化率})}$$

1） 脚注に、厳密な定義として、数式は用いず言葉によるものだが、”the elasticity of demand is one if a fall of one per cent. in price will make an increase ofone per cent. in the amount demanded”と明確に定義されている。なお武隈 [20, p 150] によれば、マーシャルは元々数学専攻で卓越した数学的能力であったが、経済学における数学の有用性に懐疑的であって、数学的定義はあえて、なされなかったようである。

と定義される。これは、価格の変化に対して、どれぐらい消費者の需要が感応的に動くか (価格に対して、敏感に多くなるか、少なくなるか、あまり増えないか、あまり減らないかなど）を把握するためのもである。反応の度合いを計測するために、変化の割合を計測すれば良いのでは、という問いがあると、思われる。つまり、価格に対する感応度として、

$$\frac{(\text{需要の変化量})}{(\text{価格の変化量})} \tag{1}$$

と定義すれば、よいのではないか、という問いである。例えば、次の図 1 の二つのグラフを見ると、左の直線のより、右の直線の傾きが急だから、右のグラフの商品の方が、より、価格の変化に対する感応度が高いと判断できるのではないか、ということである。関係性が感応度を計測したい点で微分可能であれば、傾きは微分係数と等しくなる。ところが、次の図 2 のグラフを見て頂きたい。

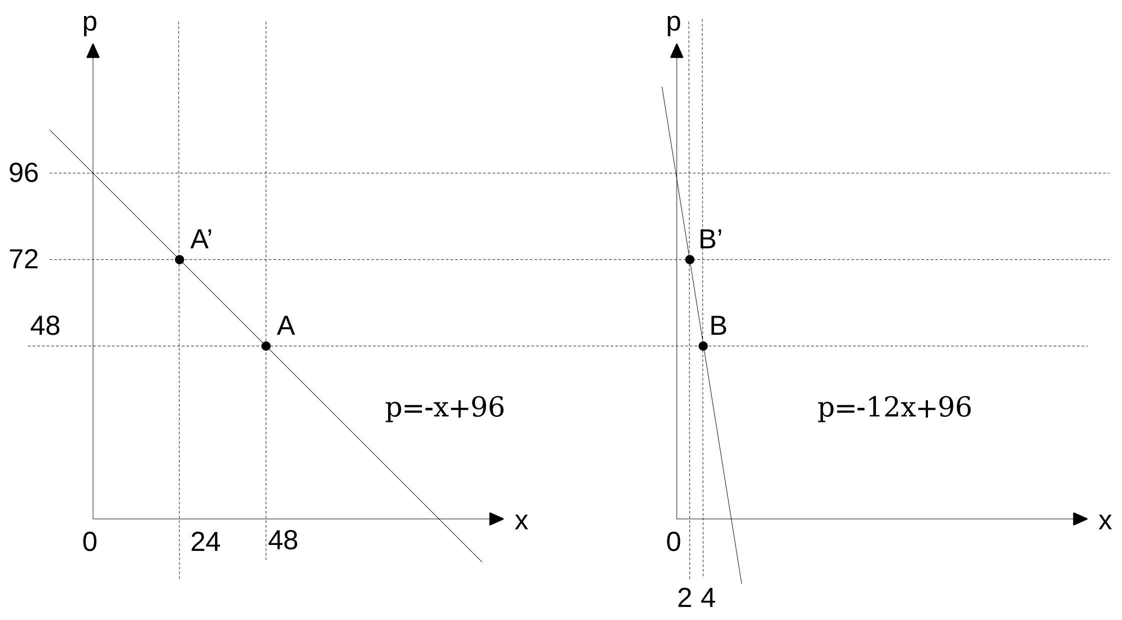


図 1　傾きの異なる需要関数

先のグラフとの違いは、目盛の単位が記載されているという点である。左のグラフの横軸の商品の 1 単位は「個」、右のグラフの商品の 1 単位は「ダース」、縦軸は共通で「百円」である。1 ダース＝ 12 個なので、右の 1 単位の目盛りが左のメモリ

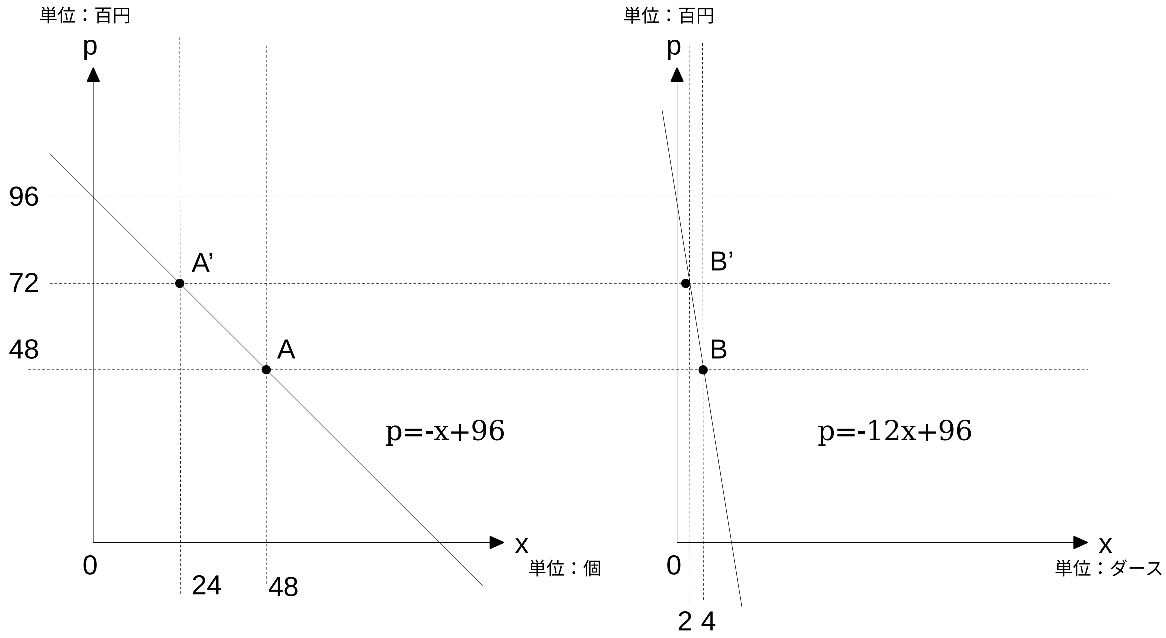


図 2　傾きの異なる需要関数：単位があるケース

の 12 個なっている。従って、右のグラフの方が傾きが急になっているが、これは数量の単位が違うだけなので、価格が等しい点 A で感応度は等しくなっていて欲しい。感応度をその点と比較する点の間での傾き、または、価格と需要との関係が十分に滑らかな場合は、微分係数で代表できることになるが、いずれにしても、二つのグラフの A,B では計測単位が異なるだけで、同じ状況であるはずなのに、異なる感応度を与えることになってしまう。

従って、単位に依存しない、いわゆる無名数 (bare number) [2]となる指標が必要となる。その無名数となる指標が、弾力性ということになる。

2.2　数学的な定義

需要関数を $x(p) : P \to X$,$p \in P \subset R, x(p) \in X \subset R, p \neq 0, x(p) \neq 0$,$R$ は 1 次元の実数空間（数直線上の点）と定義する。ある財の需要が、その財の価格のみの関数で表現される需要関数の存在が、どのような場合に保証されるのか、ここで議論しない[3]。

2）　身近な無名数としては、パーセントや偏差値がある。

3）　一般均衡分析の観点からの部分均衡分析について著書や論文のある、林貴志教授 (グラスゴー大学) による日本語のミクロ経済学の教科書の林 [4, p111-123,p253-260] が分かりやすい。

弾力性の議論は、消費者余剰などの余剰分析やパレート効率性などの厚生経済学の議論以前の話で、ある特定の財の価格と財の需要との間に、何らかの関係性があると想定される場合、観察される価格と需要との間の分析の第一段階といえるべき部分である。

ある財の価格と需要量に何らかの関係性が無いと考えるほうが不自然で、かといって、その仕組みを考えるのは、所詮数学的にどんなに複雑に (あるいは抽象的に条件を緩めて) 描いたところで、そこから漏れる部分はいくらでもあるのは当たり前なので、ここではむしろ割り切って、単なる関数 (function) として、もちろん対応 (correspondence) を含めて、そもそも本当はそんな数学的構築物で表現できる関係性ですらないかもしれないが、需要関数をそう仮定する。

需要の弾力性とは、ある基準となる価格とその価格に対応する需要の組、$p^*, x(p^*)$ に対し、比較する価格とその価格に対応する需要の組、$p', x(p')$（これは元の基準となる価格と需要の組を含む）が存在して、

$$\epsilon(p', p^*) = \frac{x(p') - x(p^*)}{x(p^*)} \Bigg/ \frac{p' - p^*}{p^*} \tag{2}$$

で、定義される、$P \times P$ を定義域とした実数値関数である。需要の価格弾力性については、需要関数は右下がりのグラフが想定されるので。マイナスの符号を通常つけるのが一般的になっている。ここでは、議論が混乱することを避けるために、あえて符号はつけていない。この弾力性示す関数 $\epsilon(p)$ が、p および $x(p)$ について、無名数であること、つまり、各単位を変換するための任意の定数倍 (例えば、1 ダースを 12 個に変換する、この”12”という係数や、1 ドル=160 円のように 160 倍する為替レート、など) について不変であることは、任意の $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, p' \neq 0, p^* \neq 0$ について、

$$\frac{\alpha x(p') - \alpha x(p^*)}{\alpha x(p^*)} \Bigg/ \frac{\beta p' - \beta p^*}{\beta p^*} = \epsilon(p', p^*)$$

となることで、確認できる。これを感応度を傾きで定義した場合は、

$$\frac{\alpha x(p') - \alpha x(p^*)}{\beta p' - \beta p^*} = \frac{\alpha(x(p') - x(p^*))}{\beta(p' - p^*)}$$

となるので、α, β による単位変換に依存してしまうことが分かる。

2.3 基準点を中間点で定義する弾力性: 弧弾力性 (arc elasticity)

榎本 [2, p 72]、マンキュー [14, p 139] や三上 [16, p 66] でも紹介されているが、基準点を中間点で評価する弾力性の定義が別にある。これは、前節の定義が、必ずしも $\epsilon(p', p^*) = \epsilon(p^*, p')$ とならないことによる。つまり、基準となる評価点を入れかえた場合、$p* \to p'$ の弾力性と $p' \to p^*$ の弾力性とが、必ずしも同じにならないということである。再び、López・Francisco [3, p 156] によると、Allen・Lerner[1] で、弧弾力性 (arc elasticity) として、この問題を解決するために提案されたとのことである。次のように定義される。

$$arc\ \epsilon(p', p^*) = \frac{x(p') - x(p^*)}{(x(p') + x(p^*))/2} \bigg/ \frac{p' - p^*}{(p' + p^*)/2} \tag{3}$$

明かに、$arc\ \epsilon(p', p^*) = arc\ \epsilon(p^*, p')$ である。また、無名数であることも同様に確かめられる。

ところが、この弧弾力性は、通常の弾力性で保たれていた性質が一方で失われている。弾力性の定義では、次のことが成り立つ。

性質 1. 需要関数が 1 次関数で表現されていた場合、価格の基準点を固定した時、任意の比較点で、弾力性が等しくなる

弧弾力性では、比較する点によって基準となる数量が変化してしまうため、この性質 1 が満されない。このことを確かめる。需要関数を任意の一次関数 $x(p) = ap + b$ $(a > 0, b > 0)$ とし、基準点を $p^* > 0$, 比較点を $p' = p^* + \Delta p$ とする。弾力性は、

$$\begin{aligned}\epsilon(p', p^*) &= \frac{a(p^* + \Delta p) + b - (ap^* + b)}{ap^* + b} \bigg/ \frac{p^* + \Delta p - p^*}{p^*} \\ &= \frac{a\Delta p}{ap^* + b} \bigg/ \frac{\Delta p}{p^*} = \frac{a\Delta p}{\Delta p} \cdot \frac{p^*}{ap^* + b} = \frac{ap^*}{ap^* + b} = a \cdot \frac{p^*}{x(p^*)}\end{aligned}$$

となり、Δp に依存せず、基準点の情報のみで決定し、比較点に左右されないこと

が分かる。一方で、弧弾力性は、

$$arc\ \epsilon(p', p^*) = \frac{a(p^* + \Delta p) + b - (ap^* + b)}{((a(p^* + \Delta p) + b) + (ap^* + b))/2} \Bigg/ \frac{p^* + \Delta p - p^*}{((p^* + \Delta p) + p^*)/2}$$
$$= \frac{a\Delta p}{2(ap^* + b) + a\Delta p} \Bigg/ \frac{\Delta p}{2p^* + \Delta p} = \frac{a(2p^* + \Delta p)}{2(ap^* + b) + a\Delta p}$$

となり、Δp に依存するため、基準点と比較点の両方の情報が必要となる。また、弧弾力性の値も比較点によって変ってくることになる。

このことを数値例で確かめるため、次の図 3 の例で考えてみたい。

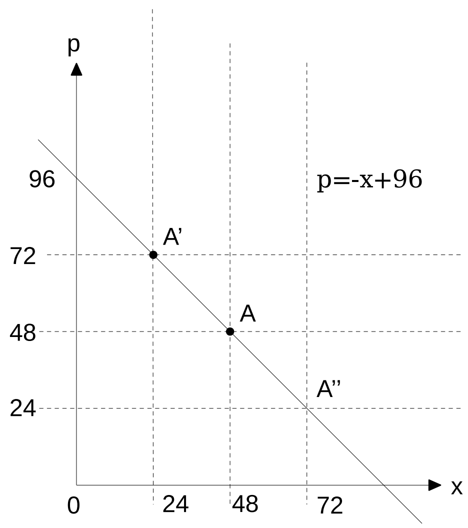


図 3　需要関数: 二つの弾力性

需要関数は、$x(p) = -p + 96$ であり、弾力性をそれぞれ A, A', A'' の点で計算し、まとめると、表 1 のようになる。弾力性は、基準点が同じ $A \to A'$ と $A \to A''$ で等しくなり、弧弾力性は 基準点を相互に入れ替えた $A \to A'$ と $A' \to A$ で等しくなることが分かる。

逆に、弾力性は、基準点を相互に入れ替えた $A \to A'$ と $A' \to A$ では数値が異なり、弧弾力性は、基準点が同じでも $A \to A'$ と $A \to A''$ では、異なる数値を示す。

(p', p^*)	$(72, 48) : A \to A'$	$(48, 72) : A' \to A$	$(24, 48) : A \to A''$
$\epsilon(p', p^*)$: 弾力性	$\frac{-48}{-48+96} = -1$	$\frac{-72}{-72+96} = -3$	$\frac{-48}{-48+96} = -1$
$arc\ \epsilon(p', p^*)$: 弧弾力性	$\frac{-1(2\cdot48+24)}{2\cdot(-48+96)-24}$ $= \frac{-120}{72} \fallingdotseq -1.67$	$\frac{-1(2\cdot72-24)}{2\cdot(-72+96)+24}$ $= \frac{-120}{72} \fallingdotseq -1.67$	$\frac{-1(2\cdot48-24)}{2\cdot(-48+96)+24}$ $= \frac{-72}{120} = 0.6$

表 1　弾力性と弧弾力性の比較

2.4　数値例: 米需要と米価格

ここまでの定義の範囲で、現実の経済の数値を使用して、数値例として適用してみる。これから示すことは、定義をそのまま適用した場合の数値例としての演習的な適用であり、個別の具体的かつ専門的な分析や研究の類ではないことを予め断っておく。

農林水産省のウェッブサイト[4)]の資料のグラフ上の数値データを改めて表にまとめた。米需要・米価格はそれぞれ主食用となっている。

まずは、米価格と米需要のそれぞれの時系列データと前年比の変化率 (前年のデータからどれぐらいのパーセンテージで増減しているか) のグラフで確認する。簡単な数字でも、数字をだけを眺めているのと、グラフで確認するのでは雲泥の差がある。生の時系列データは、まず、最初に視覚化する意味では重要だが、ダイナミックな動きが分かりにくい場合があるが、その際、変化率が役に立つ。[5)]

---

4)　農林水産省: 米の相対取引価格・数量、集荷・契約・販売状況、民間在庫の推移等のページ (https://www.maff.go.jp/j/seisan/keikaku/soukatu/aitaikakaku.html) 内の「(参考) 長期的な主食用米の価格の動向 (PDF : 130KB)」及び農林水産省農林局 (令和 6 年 8 月)「米の消費及び生産の近年の動向について」(https://www.maff.go.jp/j/council/seisaku/syokuryo/240827/attach/pdf/240827-3.pdf) を参照。米価格については、平成 21 年産までが、「(財) 全国米穀取引・価格形成センター入札結果に基づく取引価格」、平成 18 年産以降は「相対取引価格の平均値」となっており、データが若干変っているたが、変動は概ね同じ動きをしているとみなして、データの重なり期間である平成 18 年から平成 21 年までのデータの差の比率の平均を求め、「(財) 全国米穀取引・価格形成センター入札結果に基づく取引価格」のデータをその比率で割り戻して「相対取引価格の平均値」と同じ系列となるように補正している。表は補正後の数値である。また、総人口の長期的な減少傾向を加味すべきだと考えられるが、対象期間中の人口変動は大きくなく、実際、総人口で割った一人あたり米需要も、グラフ上は元の米需要とほぼ同じ動きであり、弾力性には大きく影響を与えないと考えられ、また、あくまで数値例としての取り扱いであったため、本節では一人あたり需要を採用していない。

5)　データの動きについて分かりやすくするためには、変化率でみたほうがよいと、大学 1 年生の時に、筆者にゼミ形式の授業で教えていただいたのは、当時大阪大学社会経済研究所の森口親司大阪大学名誉教授・京都大学名誉教授だった。パーソナルコンンピューターは日本電気株式会社の PC-9801、OS は Microsoft 社の MS-DOS、表計算ソフトはロータス社 (IBM 社) の Lotus 1-2-3 という

年	米価格	米価格変化率	米需要量	米需要変化率	需要の価格 弾力性 (前年比)	需要の価格 弧弾力性 (前年比)
H10	17660		913			
H11	18535	0.0495	907	-0.0066	-0.1325	-0.1363
H12	16946	-0.0857	886	-0.0232	0.2701	0.2615
H13	16130	-0.0482	912	0.0293	-0.6093	-0.5861
H14	16316	0.0115	872	-0.0439	-3.8062	-3.914
H15	16201	-0.007	895	0.0264	-3.7387	-3.677
H16	21036	0.2984	862	-0.0369	-0.1235	-0.1446
H17	15719	-0.2528	865	0.0035	-0.0138	-0.012
H18	15141	-0.0368	852	-0.015	0.4091	0.4046
H19	15203	0.0041	838	-0.0164	-4.0333	-4.075
H20	14164	-0.0683	855	0.0203	-0.2968	-0.2838
H21	15146	0.0693	824	-0.0363	-0.523	-0.5511
H22	14470	-0.0446	814	-0.0121	0.2719	0.2675
H23	12711	-0.1216	820	0.0074	-0.0606	-0.0567
H24	15215	0.197	813	-0.0085	-0.0433	-0.0478
H25	16501	0.0845	781	-0.0394	-0.4657	-0.4951
H26	14341	-0.1309	787	0.0077	-0.0587	-0.0546
H27	11967	-0.1655	783	-0.0051	0.0307	0.0282
H28	13175	0.1009	766	-0.0217	-0.2151	-0.2284
H29	14307	0.0859	754	-0.0157	-0.1823	-0.1917
H30	15595	0.09	740	-0.0186	-0.2062	-0.2176
R1	15688	0.006	735	-0.0068	-1.133	-1.1403
R2	15716	0.0018	714	-0.0286	-16.0082	-16.2547
R3	14529	-0.0755	704	-0.014	0.1854	0.1797
R4	12804	-0.1187	702	-0.0028	0.0239	0.0225
R5	13844	0.0812	691	-0.0157	-0.1929	-0.2023
R6	15315	0.1063	702	0.0159	0.1498	0.1565

表 2　米需要の価格弾力性と弧弾力性

それぞれ図 4 と図 5 は、左の軸が、米価格と米需要の軸、右側の軸 (%の表示があるが、数字はパーセントに変換前に数字になっている) がそれぞれの変化率を示している。特に、米需要のほうは、トレンドとして長期的には減少傾向であることがみてとれるが、変化率は動きがあることが分かる。ただ、動きがあるといっても、需要の方は、概ね 5 パーセントの範囲内となっているので、大きな動きはあまりないことが分かる。一方、価格は大きく動いており、概ね上下 30 パーセントの範囲内で動いている。

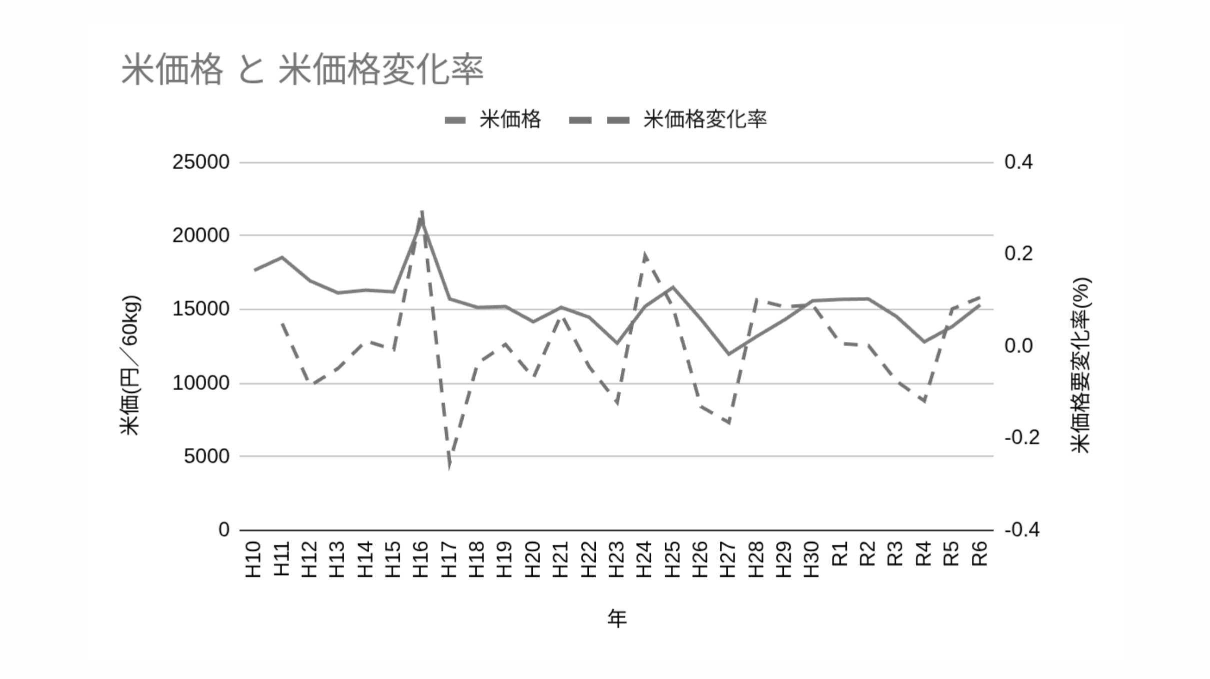


図 4　米価格と変化率

弾力性のグラフを確認する前に、価格と需要について散布図を確認しておく。需要関数の元になるグラフである。グラフには、トレンドとして直線が引かれているが、表計算ソフトの機能で、最小二乗法による線形近似を自動的にしてくれる。ほとんど真横の線となっている。価格の変化によって、需要が極端に変わってしまう、と判断してしまうかもしれない。次のグラフの図 7 をみて欲しい。このグラフ

環境で、人生で初めて表計算ソフトに出会った (各商品名等は、各社の商標または登録商標)。それまで、手書きでしかグラフを描いたことの無かった筆者にとって、数字を入力するだけでグラフが描ける表計算ソフトは驚きの連続だった。この変化率で時系列データを評価する話は、統計にかかわる人達には当たり前すぎるのか、統計学や計量経済学の教科書には意外に書いていない。自分の専門は結局実証研究とならなかったが、一般的な注意事項として、今も意識しているポイントだ。

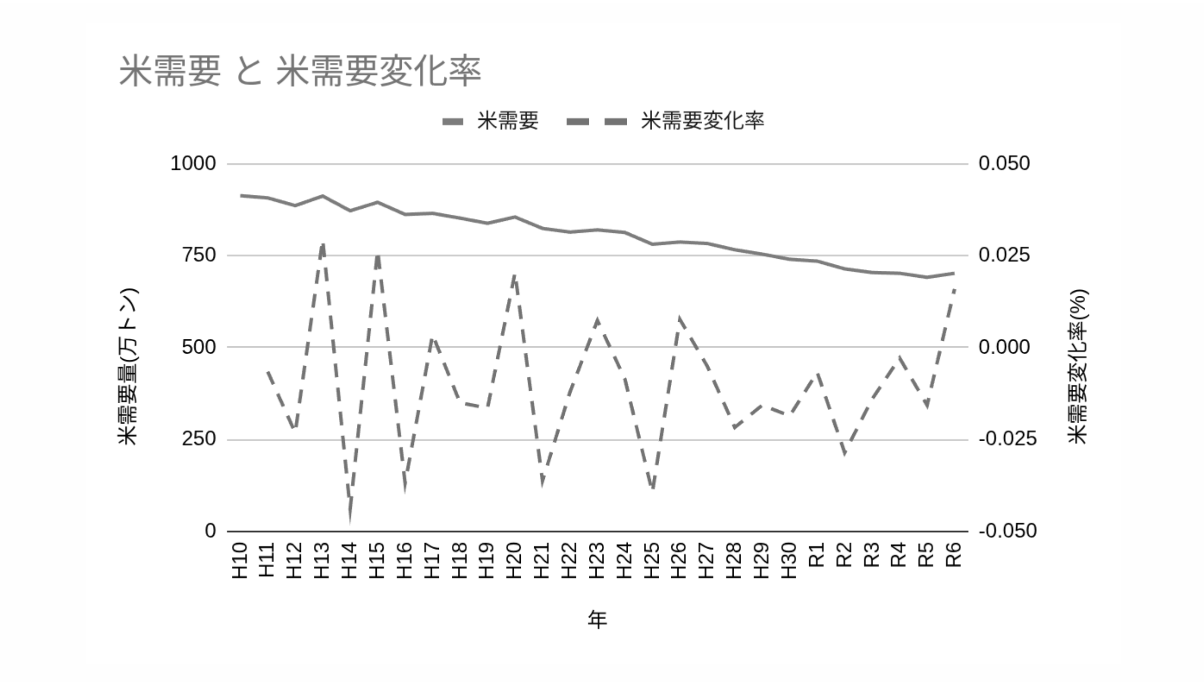


図 5　米需要と変化率

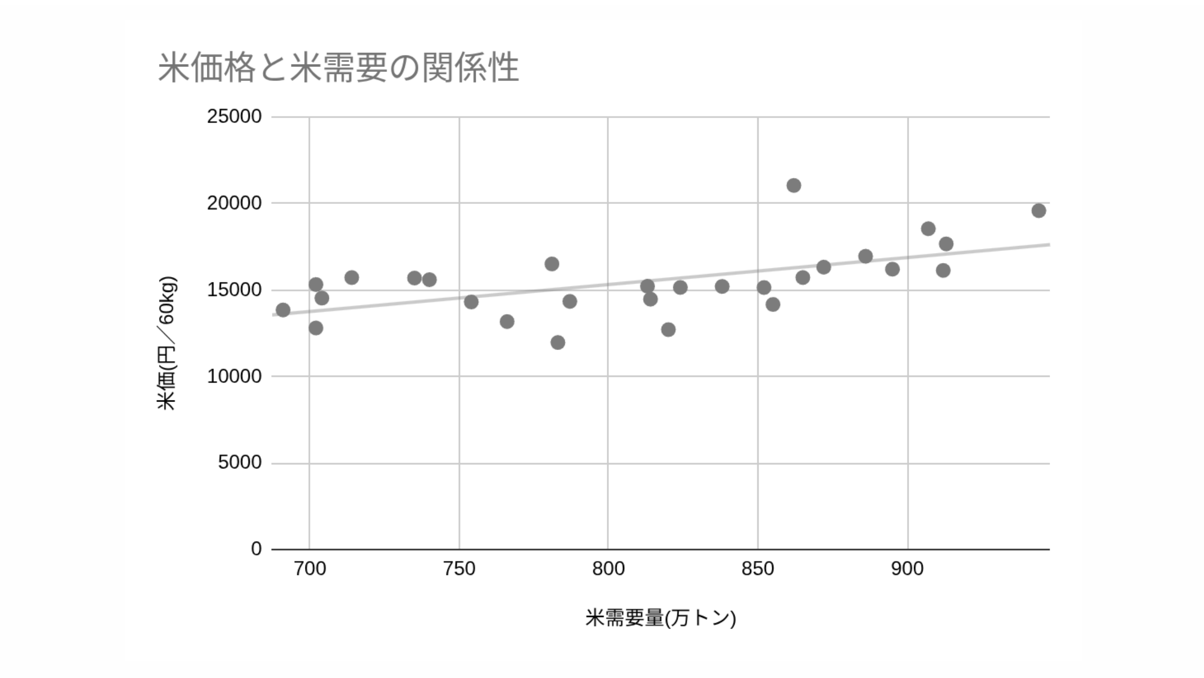


図 6　米価格と米需要関係性

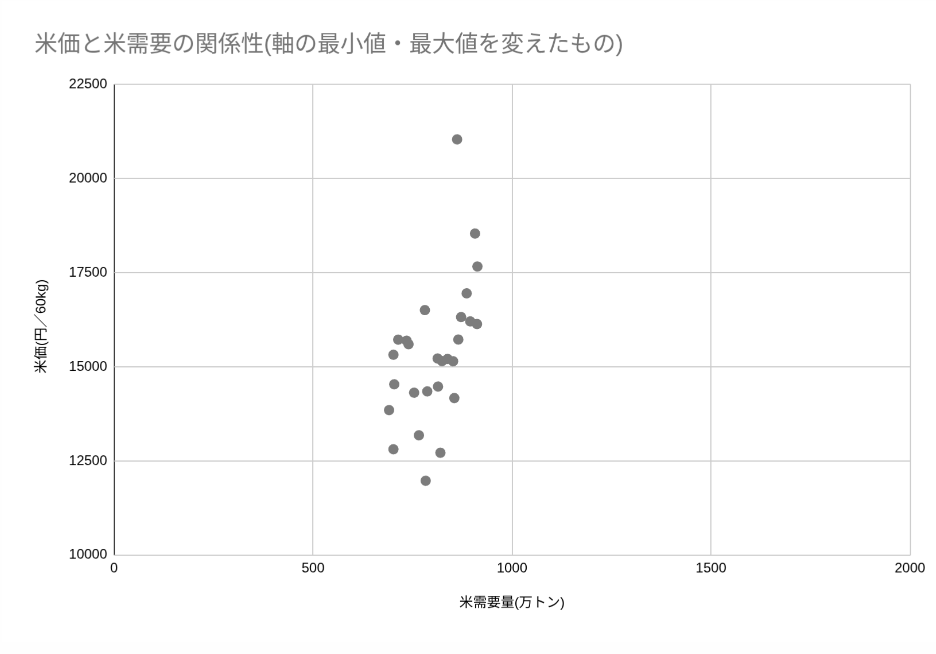


図 7　米価格と米需要関係性

は一見すると、先の散布図と全く違うデータを用いていると判断されるかもしれないが、実は、横軸縦軸の目盛の最大値と最小値を変更しただけの同じデータの組のグラフである。このグラフを見ると、図 6 で検討したのとは違い、価格に対して需要の変化が硬直的だと、判断するかもしれない。このように、グラフの傾きや形状のみで、データの性質を判断することは危険であることが分かる。

表 2 に戻ってもらい、改めて前年比の米需要の価格弾力性の数値を確認すると、概ね-0.01～-0.05 程度の範囲に収まっており、米需要の価格弾力性が硬直的であり、いわゆる「必需品」であることが分かる。一方で、大きく動いている年があることも分かる。弧弾力性も併記しているが、基準値が 2 ヶ年の移動平均となっていることだけが違うのみなので、ほぼ同じ動きをしていることも確認できる。

最後に価格弾力性の推移のグラフを確認し、この節を終えることにする。

図 8 の時系列のグラフをみると、他の今までみたグラフとは全く違う動きをしている。この 25 年のうちに、過去に 3 回 (平成 14・15 年、平成 19 年及び令和 2 年)、価格弾力性が硬直的とみなせないタイミングがあることがわかる。これは、二つの変化率の比である弾力性という概念で捉えないと、判明しなかったポイントだ。これらが消費者側の理由なのか、生産量など生産者側の問題なのか、制度やその他の

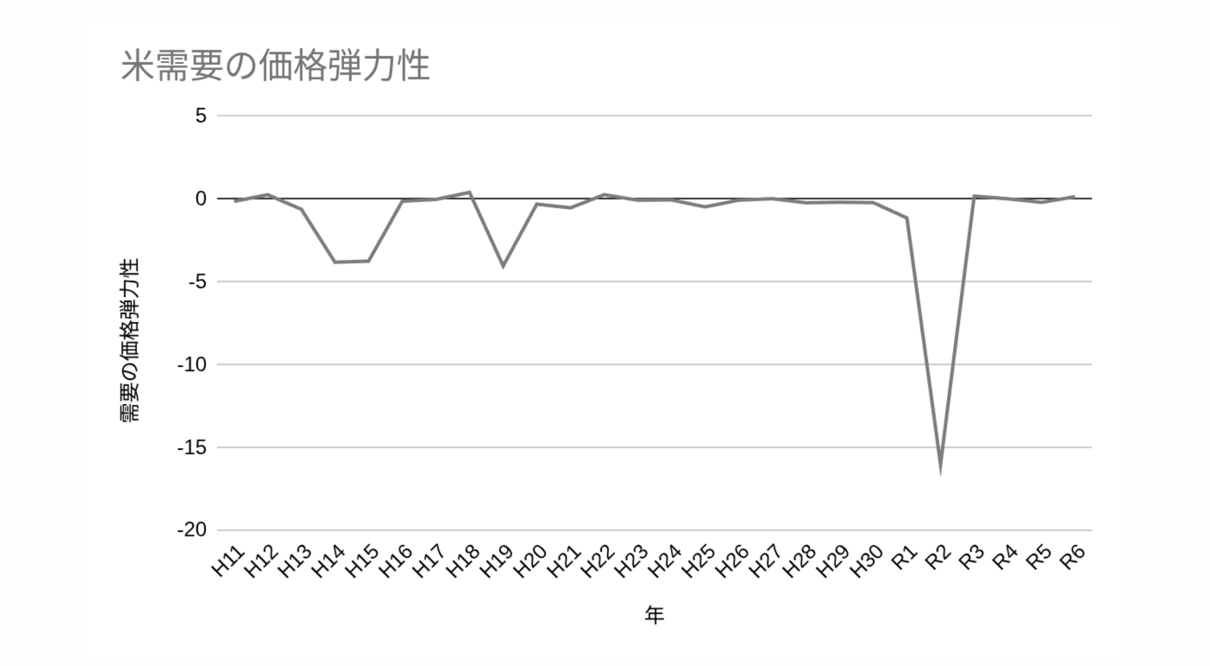


図 8　米需要価格弾力性の推移

問題なのか。この間、米の不作、新型コロナウィルスの流行、消費税増税など様々な要因があると思われる。この間の制度面の変更については、稲熊 [8] が参考になると思われるが、本ノートは米需要の研究が目的ではないので、これ以上の言及は差し控える。

最後に再度申し添えるが、本節は、単純に弾力性の定義に沿って現実のデータをそのまま適用し、価格弾力性を理解し、ある程度の現実の価格の動きや性質を確認することを目的としたもので、何らかの専門性に基いた分析ではないことを念押ししておく。

3　需要と供給：財の種類が 1 種類のケース

3.1　関数の微分可能性を前提とした弾力性

第 2.1 節では、弾力性と弧弾力性との差異の議論で、1 次関数を用いたことを除いて、数値例も含めて需要関数の具体的な関数型を前提とはしていなかった。現実の需要量と価格の組のデータが二つ以上あれば定義できるものであり、第 2.1 節で

具体的に適用したように、補正要因など複雑な影響を加味しないのであれば、数値例への適用も難しくない。一方で、数学的な理想状態を前提とした理論上の「弾力性」の概念があり、理論的な応用の中では重要な概念となっている。Marshall[15, p 162] の弾力性の定義は、パーセント変化 (変化率) の比率という、言葉によるものであるが、文中で示されている図の需要関数は、滑かで明かに微分可能な想定をしており直線ですらないので、「本来の」という意味では、微分可能な関数上の微少変化に対する定義が本来なのかもしれない。本節では、理論上の弾力性のために、需要関数の (連続) 微分可能であることを仮定する。

なお、これまでは、需要関数を $x(p)$ と置いて議論していたが、関数に何らかの仮定を置いていないので、実はそのまま供給関数や、その他の関数とみなしても支障なかった。今後は、供給関数その他の性質や仮定に依存する議論をするので、供給関数は $y(p) : P \to Y \subset R$ と定義し、明確に区別する。

需要関数 $x(p)$ が微分可能であった場合は、2 点間の変化率の比ではなく、2 点間の差が基準となる点まで、十分小さくなった場合の、基準点における微小な変化に対する比率になる[6)]。この場合、基準点 p^* に対する比較点 p' を $p' = p^* + \Delta p$ と定義する。まず、元の価格弾力性の定義により、

$$
\begin{aligned}
\epsilon(p', p^*) &= \\
\epsilon(p^* + \Delta p, p^*) &= \frac{x(p^* + \Delta p) - x(p^*)}{x(p^*)} \bigg/ \frac{(p^* + \Delta p) - p^*}{p^*} \\
&= \frac{x(p^* + \Delta p) - x(p^*)}{\Delta p} \cdot \frac{x(p^*)}{p^*}
\end{aligned}
$$

となる。需要関数 $x(p)$ で、p^* で微分可能だとすると、右辺の $\Delta p \to 0$ の極限が存在して、

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta p \to 0} \epsilon(p^* + \Delta p, p^*) &= \lim_{\Delta p \to 0} \frac{x(p^* + \Delta p) - x(p^*)}{\Delta p} \cdot \frac{p^*}{x(p^*)} \\
&= \frac{dx(p^*)}{dp^*} \cdot \frac{p^*}{x(p^*)}
\end{aligned}
$$

となる。左辺を $\epsilon(p^*)$ と書くこととし、任意の $p^* \in P$ で需要関数が微分可能だとす

6） 久武・巽 [7, p 68] に記述があるように、点弾力性 (point elasticity) と呼ばれることもある。

れば、需要の価格弾力性は、任意の $p \in P$ について、

$$\epsilon(p) = \frac{dx(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \tag{4}$$

と定義できる。これが需要関数が微分可能である場合の需要の価格弾力性の定義となる。ほぼ明かだが、弧弾力性も微分可能な場合の極限として定義すると、式 4 と同じになることを確かめる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta p \to 0} arc\ \epsilon(p^* + \Delta p, p^*) &= \lim_{\Delta p \to 0} \frac{x(p^* + \Delta p) - x(p^*)}{\frac{x(p^*+\Delta p)+x(p^*)}{2}} \Bigg/ \frac{(p^* + \Delta p) - p^*}{\frac{(p^*+\Delta p)+p^*}{2}} \\
&= \lim_{\Delta p \to 0} \frac{x(p^* + \Delta p) - x(p^*)}{\Delta p} \cdot \frac{2p^* + \Delta p}{x(p^* + \Delta p) + x(p^*)} \\
&= \frac{dx(p^*)}{dp^*} \cdot \frac{p^*}{x(p^*)}
\end{aligned}$$

従って、微分可能な需要関数に対しては、弾力性も弧弾力性 (arc erasticity) も結局は同じ定義になり区別する必要が無いので、以下では弾力性としてのみ表現する。もちろん、具体的な離散データに対して、この二つの概念が異なる数値をもたらすことは定義から明かで、弧弾力性の定義に意味が無いと言っている訳ではない。

微分係数で定義された弾力性は、(需要関数の基準点の微分係数) × (基準点の価格) ／ (基準点の需要) となっている。1 次関数の場合は、(需要関数の基準点の微分係数) は、任意の点で同じ係数であるから、(基準点の価格) と (基準点の需要) で、弾力性の値が変化することが分かる。このことを図 9 のグラフで確認する。点 A が基準点で、弾力性を検討する点となっている。線 D-D、線 D'-D'、線 D''-D'' のそれぞれが、(逆) 需要関数となっている。連続微分可能な需要関数に対して、微分係数が 0 ではないこと、需要関数が一対一写像 (通常仮定している、「価格に対して単調減少関数」であれば、この条件は満す) であることを追加で仮定すれば、逆関数定理 (杉浦 [17, p 139] を参照) により、微分可能な逆関数 (逆需要関数) が存在する。この時、逆需要関数として、グラフに描ける。以下、横軸定義域、縦軸を値域とする通常のグラフの作法からすると、需要と価格を示すグラフは逆需要関数というべきものだが、通常は逆需要関数が存在する想定をしており、1 種類の財のグラフの中での議論で、あえて逆需要関数として意識的に区別するメリットはないことから、以下では混乱の無い限り、単に需要関数と呼ぶことにする。

図 9 の例では、点 A で、線 D-D に、線 D'-D' と線 D''-D'' と接しているので、微

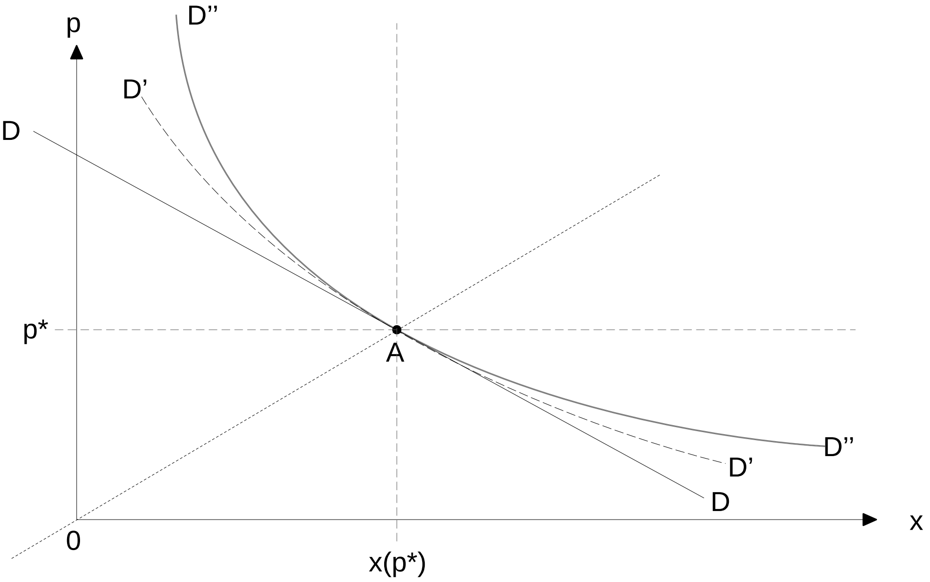


図 9　微分可能なケースの需要弾力性

分係数が同じになる。結果として、3 つの異なる需要関数に対して、同じ価格弾力性の値となることに留意する。つまり、同じ価格と数量について、同じ価格弾力性だからといって、同じ需要関数であるとは限らないということになる。

3.2　需要関数：一次関数の場合

本節では、需要関数または供給関数が１次関数、つまり、価格と需要量または共有量の関係が直線の式で表現できる場合について、整理する。

まずは、価格について単調減少を仮定した需要関数の価格弾力性について、López・Francisco [3] の説明に沿う形で確認する。図 10 のグラフは、弾力性と需要関数の関係を示したものだ。

先に述べたように、式 (4) を確認すると微分係数と基準点の価格と需要量の比をかけたものになっている。１次関数の場合は、微分係数は固定となり、原点から伸びて逆需要関数と交わる直線の傾きが需要と価格の比率に等しく、逆関数定理から、需要関数の微分係数の逆数が、逆関数である逆需要関数の微分係数に等しいので、弾力性が 1 である点は、逆需要関数の傾きの絶対値と原点から伸びて逆需要関数と交わる直線の傾きがちょうど等しくなる点となる。点 A の右下方向は、原点

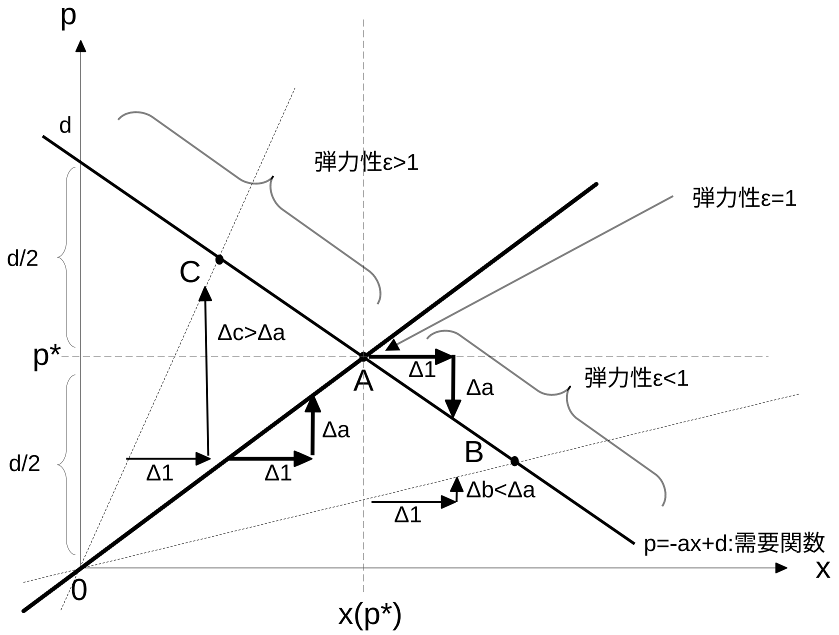


図 10　需要関数が一次関数の場合の弾力性：基準点による違い

から伸びる直線の傾きが小さくなるので、弾力性は 1 より小さくなり、点 A の左上方向は、原点から伸びる直線の傾きが大きくなるので、弾力性は 1 より大きくなる。このように需要関数が一次関数の場合は、価格弾力性は、一般的にどの点で評価するかによって異なる。

一方で、価格弾力性の定義から、基準点が同じであれば、需要量と価格の比が変化しないので、傾きによって、弾力性が決まる。この事実を、グラフで確認する。

図 11 のグラフをみていただくと、基準点を中心に、需要関数の傾きが変化している。基準点が同じであれば、価格弾力性は、1 単位の価格の変化について大きく需要が動く、つまり、グラフの傾きが緩やかであれば、弾力性は大きくなり、逆に、傾きが急であれば、弾力性は大きくなる。節 2.1 で確認したように、傾きだけでは弾力性は比較できないはずが、ここでは、あたかも、傾きだけで弾力性が決まるかのような印象を受ける。しかし、ここで留意点は、傾きで比較できるのは他の条件を同じにした場合という点だ。つまり、

性質 2. **(1) 価格と需要の単位が同じ、(2) 需要関数が一次関数、(3) 弾力性を計測**

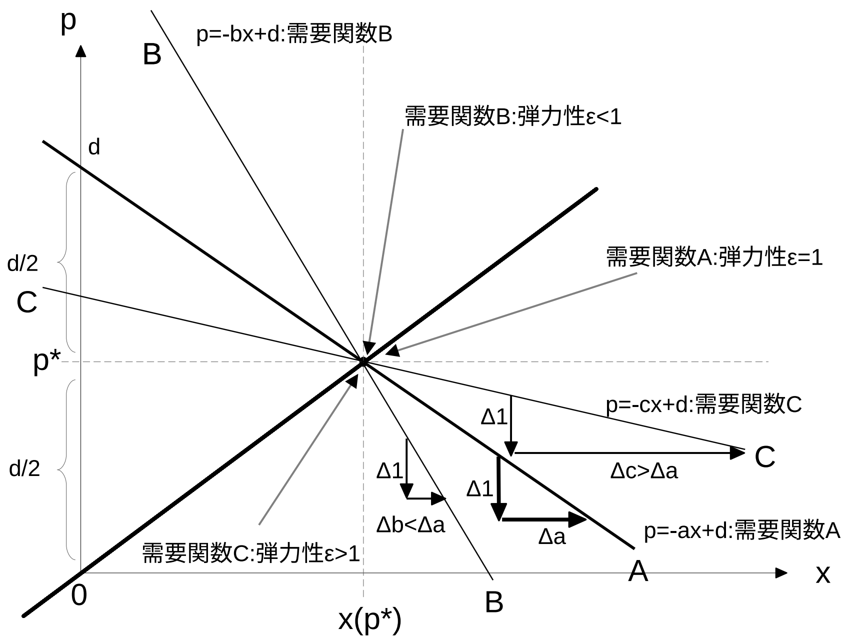


図 11　需要関数が一次関数の場合の弾力性: 傾きによる違い

する基準点の価格と需要の組が同じ、であれば、傾きだけで、需要の価格弾力性が比較できる。

これらいずれかが満たされない場合、例えば、縦軸横軸の単位が同じで、一次関数の需要関数の場合でも、基準点が異なれば、傾きが違って弾力性が同じになる場合もある。

3.3　供給関数: 一次関数の場合

需要と供給をそれぞれ一本の一次関数で表現する場合において、供給関数と需要関数との違いは、微分係数について通常正数を想定する点ぐらいだと思われる。供給関数を $y(p) = cp + d$ とすると、$c > 0$ を仮定することになる。一次関数の需要関数と供給関数の大きな違いは、原点を通るか否かである。需要関数は、通常は原点を通らない。価格が 0 の時、自分たちの予算制約に関係なくなり、無限に消費でき

るからだ。[7)]

いずれにしても、原点を通る可能性があるのは、供給関数の特徴といえよう。需要関数と同様に微分可能な場合の供給の価格弾力性 η(エータ) を次のように定義する。

$$\eta(p) = \frac{dy(p)}{dp}\frac{p}{y(p)} \tag{5}$$

一次関数の場合は、$\eta(p) = c \cdot p/(cp + b)$ となり、原点を通る場合は $b = 0$ となるので、傾きと基準点に関係なく、価格弾力性は常に $\eta(p) = 1$ となる。一般的には、$\eta(p) = c \cdot p/(cp + b) > 1$ から、$b < 0$ の時は、傾きと基準点に関係なく弾力性が 1 より大きく、同様に $b > 0$ の時は、傾きと基準点に関係なく弾力性が 1 より小さいことが分かる。

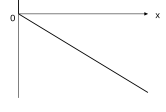
需要関数と同様に、基準点が同じであれば、直線の傾きで弾力性が決まることは、定義から導ける。

3.4 需要関数・供給関数：一般的な関数の場合

節 2.4 で具体的な数値例でみたように、弾力性が硬直的（非弾力的）で０に近い値を取るものであった。一方で、基準点にか関わらず、一定の弾力性を示す商品もよく観察される。実証研究においては、何らかの弾力性が一定の値で固定であることを仮定し、議論を展開しているものも少なくない。ここでは、財の種類が１種類の場合に、価格弾力性が一定となる微分可能な関数の形状を求める。林 [5, p 34] の練習問題のヒントにもあるように、常微分方程式を用いる。小山 [11, p 103] に、証明が紹介されているので、沿った形で確認する。

需要関数・供給関数をまとめて、連続微分可能な関数 $f(p)$ と表現することとす

7) 消費について、マイナス効果があるような、例えば、ゴミ市場のようなものを想定すれば、もちろん原点を通る想定も可能だと思うが、この場合は、図のように原点まで価格に関係なく 0 で、価格がマイナスになって、買い手があらわれるような関数になるだろう。



る。弾力性の定義から、ある一定の弾力性 α に対して、任意の $p \neq 0$ について、

$$\frac{df(p)}{dp} \cdot \frac{p}{f(p)} = \alpha$$

が成り立っている。この常微分方程式を $f(p)$ について解く。この式を整理すると、

$$\frac{1}{f(p)} \cdot \frac{df(p)}{dp} = \frac{\alpha}{p}$$

となる。両辺を p で積分すると、

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{f(p)} \cdot \frac{df(p)}{dp}\right) dp &= \int \frac{\alpha}{p} dp \\
\int \frac{1}{f(p)} df(p) &= \int \frac{\alpha}{p} dp
\end{aligned}$$

ここで、一般に自然対数の微分 (杉浦 [17, p 195] など参照) から、

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

であったので、C, C', C'' を任意の不定積分の定数とすると、

$$\begin{aligned}
\ln f(p) + C' &= \alpha \ln p + C'' \\
\ln f(p) &= \alpha \ln p + C'' - C' \\
\ln f(p) &= \alpha \ln p + C \\
\ln f(p) &= \ln p^\alpha + \ln e^C \\
\ln f(p) &= \ln e^C \cdot p^\alpha
\end{aligned}$$

最後の 2 行は、一般に $\ln e = 1$,$\ln x^a = a \ln x$,$\ln x \cdot y = \ln x + \ln y$ であるため。e は、自然対数の底[8)]。従って、$f(p) = e^C \cdot p^\alpha$ となる。e^C も結局は任意の正の定数なので、これを改めて、任意の定数 $C > 0$ と置くと、

$$f(p) = Cp^\alpha$$

となる。これが、弾力性が一定の場合の関数の一般形になる。次に $p > 0$ を仮定する。

$$\frac{df(p)}{dp} = C\alpha p^{(\alpha-1)}$$

8) いわゆるネイピア数。指数関数を $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ と定義した時、$e = \exp 1$ として定義されるもの。杉浦 [17, p 176 - p 177] を参照。

であるので、需要関数 $x(p) = f(p)$ を狭義の単調減少関数と仮定すると、$\frac{df(p)}{dp} < 0$ であるので、$\alpha < 0$ となる。つまり、通常の右下がりの需要関数の場合、需要の価格弾力性が一定となる需要関数の一般形は、

$$x(p) = \frac{C}{p^{\beta}} \ (p > 0, C > 0, \beta > 0)$$

となる。同様に供給関数を狭義の単調増加関数を仮定すると、$\frac{df(p)}{dp} > 0$ であるので、$\alpha > 0$ となる。つまり、通常の右上がりの供給関数の場合、需要の価格弾力性が一定となる需要関数の一般形は、

$$y(p) = Cp^{\beta} \ (p > 0, C > 0, \beta > 0)$$

となる。特に $\beta = 1$ の時は $y(p) = Cp$ という原点を通る直線となることは、節 3.3 で確認したことと整合的なことが分かる。

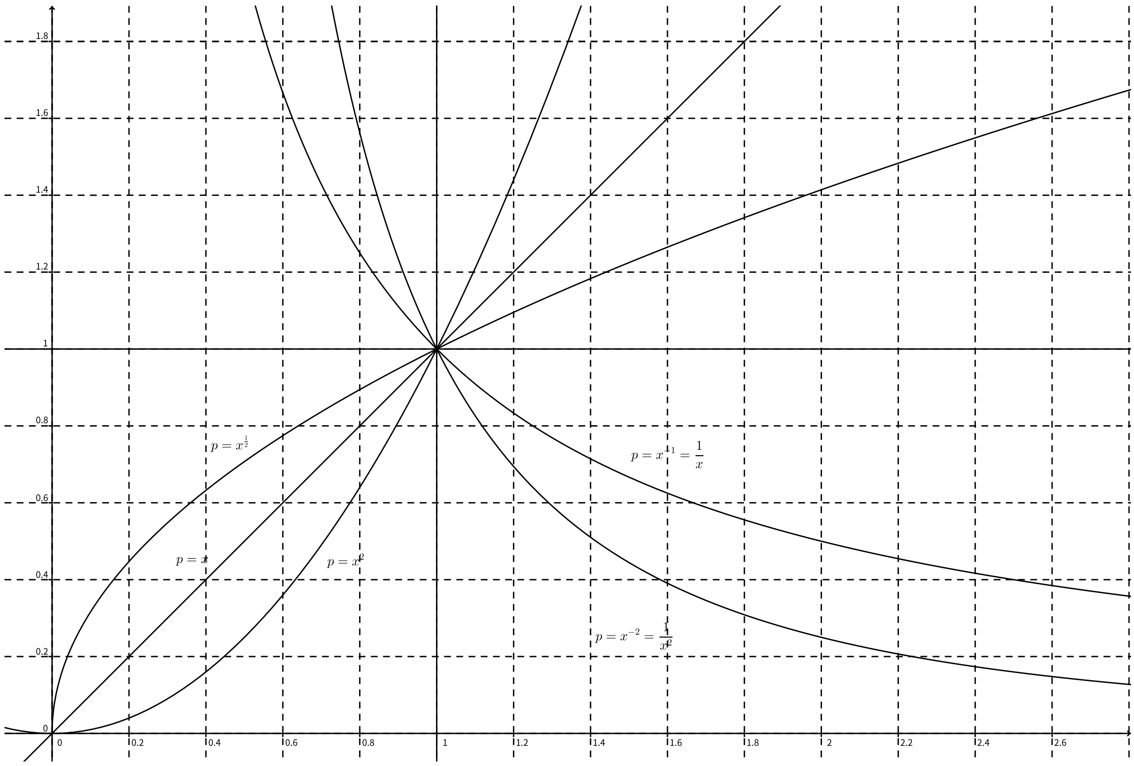


図 12　弾力性が一定となる関数群

図 12 は、$C = 1, \beta = -1, -1/2, 1/2, 1, 2$ のケースを描いたものだ。

β	$x=p^\beta$	逆関数	dx/dp	弾力性 $(p=1)$
-1	$x=p^{-1}=\frac{1}{p}$	$p=x^{-1}=\frac{1}{x}$	$-p^{-2}$	-1
$-\frac{1}{2}$	$x=p^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}$	$p=\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{2}p^{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$x=p^{\frac{1}{2}}$	$p=x^2$	$\frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$
1	$x=p$	$p=x$	1	1
2	$x=p^2$	$p=x^{\frac{1}{2}}$	$2p$	2

表 3　弾力性と弧弾力性の比較

それぞれの弾力性は表 3 のようになる。全ての関数で弾力性が一定で、点 $(1,1)$ を通るので、(点 $(1,1)$ の微分係数)=(価格弾力性) となる。改めて、価格弾力性の値とグラフを比べれば、グラフの傾きのみで、弾力性が語れないことがよくわかる。何故なら、直線のグラフ以外は、微分する場所でグラフの傾きが異なることは明かなのに、弾力性はそれぞれ一定だからだ。

価格弾力性が一定となることの図的な理解を、Hirshleifer・Glazer[6, p 129][9)] の図を参考に説明する。図 13 に、三つの三角形 ΔOAa、ΔOBb、ΔOCc が描かれている。それぞれ、需要曲線上の点 A、点 B、点 C を接点として接する直線 (接線) と、原点 O からの接点点 A、点 B、点 C とを結ぶ直線と p 軸で構成されている。それぞれ二等辺三角形であることが分かる。また、例えば点 A を通る x 軸に平行な線を引くと、この二等辺三角形 ΔOAa を丁度真ん中で二つに分けていて、二等辺三角形のいわゆる底角の角度が等しく、原点からの直線の傾きと、接線の傾きがちょうど逆数になっていることを示している。例えば、点 A では、直線 OA の傾きは、(価格) ／ (数量) であって、$0.5/2=1/4$ となっている。一方需要曲線の接線傾きは、$dx/dp=-2/0.5=-4$ となっている。価格弾力性の定義は、この二つの数字のかけ算だったので、$1/4\times -4=-1$ となっている。同様に、点 B、点 C でも弾力性は -1 となる。反比例のグラフでは、常にこの二等辺三角形を形成するので、弾力性が一定となっていることになる。

9）最新版は、デイビッド ハーシュライファー氏が筆者に加わり、ページ数も増えて、”Price Theory and Applications: Decisions, Markets, and Information”,Jack Hirshleifer,Amihai Glazer,David Hirshleifer,2005,Cambridge University Press と、新しい出版社から出版となっており、140 ページに同じグラフがある。

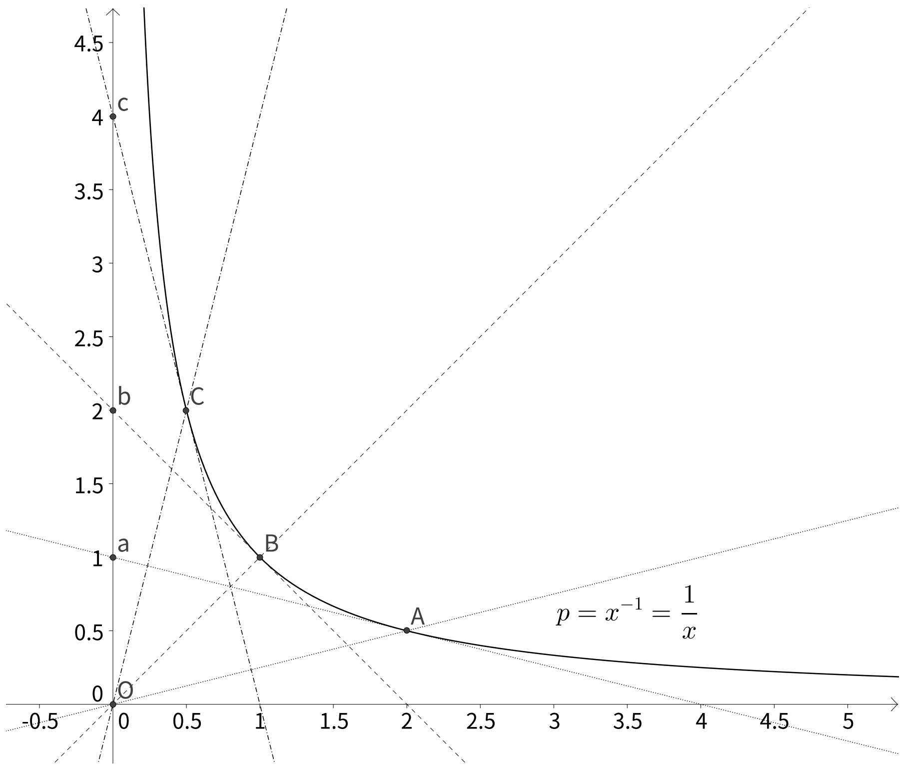


図 13　弾力性が一定であることの図的理解

3.5　対数表示の弾力性：傾きのみで判断できる弾力性

経済学に限らないと思われるが、様々な関数を自然対数で変換することで、関数が線形 (linear) になり、扱いやすくなる場合がある。

(自然) 対数関数については、杉浦 [17, p 194 - p 196] が参考になる。なお、一般的に使用される対数というと、常用対数 (common logarithm) と自然対数 (natural logarithm) がある。環境省の騒音に係る環境基準の評価マニュアル [9, p 2] などにもあるように、生活に近いところでの使用が多いのは常用対数[10] だと思われるが、経済学においては、通常自然対数を使用しており、自然対数のことを「自然」をつ

10）　常用対数は、$log_{10}100 = 2$、$log_{10}1000 = 3$ となり、大きい数字を桁数のレベルの小さい数字に変換するのに向いている。もちろん自然対数も同様のことはできるが、底が 10 の方が圧倒的に分かりやすい。国際単位系（SI）基本単位の定義改定と計量標準 [19] の付録の「国際単位系（SI）第 9 版（2019）日本語版」に、ベル、デシベルの解説が掲載されており、デシベル (dB) は、$10 \log_{10} \frac{X}{X_0}$ と定義されている。最初の 10 はベルをデシベルにするために 1/10 の単位となっているので、10 倍している。X_0 がある基準値、X がその比較する数値で、この比の常用対数を取ったものが (デシ) ベルとなる。従って、何らかの比を持ちいた基準値の分野については、計算の際に常用対数が前提となることになる。

けずに、単に「対数」ということが多い。

表記としては、底をそれぞれ表記し、自然対数を $\log_e x$、常用対数 $\log_{10} x$ とするべきなのかもしれないが、どちらもそれぞれよく使用される文脈に応じて、単に $\log x$ と表記されている場合もあり混乱することも多い。本稿では、自然対数ではよく用いられている、logarithm の l と natural の n をつなげた $\ln x$ という表記を使用することとする。また、特に断らない限り、対数といえば自然対数のことを指すものとする。

経済学の理論で、一般的に常用対数が用いられない理由の一つとしては、常用対数を微分した場合、扱いやすい形にならないことがあげられる。これまでと同様に微分可能な需要関数を $x(p)$ とすると、底が a である対数の微分は、底の変換公式[11)]と既出の自然対数の微分の結果を使えば、

$$
\begin{aligned}
\frac{d\log_a x(p)}{dp} &= \frac{d\left(\frac{\ln x(p)}{\ln a}\right)}{dp} \\
&= \frac{1}{\ln a}\frac{d\ln x(p)}{dp} \\
&= \frac{1}{\ln a \cdot x(p)}
\end{aligned}
$$

となる。もちろん、$a = e$ の時は、$\ln a = \ln e = 1$ となり、通常の自然対数の微分の結果になるが、常用対数のように、それ以外の底の場合は、定数として $\ln a$ が残ってしまうことが分かる。

対数の関係では次のことが分かっている。

性質 3.

$$
\frac{dx(p)}{dp}\frac{p}{x(p)} = \frac{d\ln x(p)}{d\ln p}
$$

小山 [12, p 24 - p 26] に証明があり、通常の弾力性の定義から、自然対数表示の弾力性と同じになることが分かる。ここでは、逆に自然対数表示の弾力性の定義から、通常の弾力性を導出する。

11） $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$

$z=\ln p$ とおくと、$e^z=p$ となる。これを代入して、合成関数の微分を適用し、$\frac{de^z}{dz}=e^z$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}\frac{d\ln x(p)}{d\ln p}&=\frac{d\ln x(e^z)}{dz}\\&=\frac{d\ln x(e^z)}{dx(e^z)}\cdot\frac{dx(e^z)}{dz}\\&=\frac{1}{x(e^z)}\cdot\left(\frac{dx(e^z)}{de^Z}\cdot\frac{de^z}{dz}\right)\\&=\frac{1}{x(e^z)}\cdot\left(\frac{dx(e^z)}{de^z}\cdot e^z\right)\end{aligned}$$

ここで、$e^z=p$ であったので、代入すると、

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{x(p)}\cdot\frac{dx(p)}{dp}\cdot p\\&=\frac{dx(p)}{dp}\cdot\frac{p}{x(p)}\end{aligned}$$

となり、二つの異なる表現が等しいことが分かった。常用対数では一般に成り立たないことも証明の過程で確認できる。対数表示の弾力性は、グラフの目盛が (自然) 対数目盛だった場合に、そのグラフの傾き (微分係数) だけで、弾力性が分かるという意味である。前田 [13] で、「エンケル関数などの所得弾力性或いは支出弾力性を計測する方法」の一つとして、「対数目盛りのグラフに書いたエンケル関数の勾配を読みとる方法」が紹介されており、場合によっては対数目盛のグラフの傾きから弾力性を計測していたであろうことが分かる。

もう少し具体的な関数のケースで適用してみる。節 3.4 で確認したように、弾力性が一定となる需要関数は、$x(p)=C/p$ のような形になることが分かる。両辺に自然対数をとる。

$$\begin{aligned}\ln x(p)&=\ln C/p\\&=\ln C+\ln\frac{1}{p}\\&=\ln C+\ln p^{-1}\\&=\ln C-\ln p\end{aligned}$$

ここで、$X=\ln x(p)$、$A=\ln C$、$P=\ln p$ と置けば、$X=A-P$ すなわち $P=-X+A$ となり、対数目盛では、切片 A で、傾き-1 の直線の式となることが分かる。そし

て、対数表現の弾力性は、$\frac{d\ln x(p)}{d\ln p} = \frac{dY}{dP} = -1$ で、節 3.4 の結果とも一致する。この結果は、弾力性が一定となる関数であれば、同じことが言える。これらの事実をまとめると、次のようになる。

性質 4. 財が 1 種類の需要 (供給) の価格弾力性の二つのグラフにおいて比較する場合、**(1) 任意の基準点 (価格と需要 (供給) の組) で弾力性が一定**で、**(2) 目盛が同じ単位 (価格と需要 (供給) の各軸) の対数表示**である、の二つの条件を満すことを前提に関数をグラフで表現している場合は、グラフは直線となり、**直線の傾きのみで弾力性が比較できる**。

ただし、対数目盛にしてしまうと、グラフ上の数量的な意味は異なるものになっているので、グラフの読み方には注意が必要だ。

そもそも弾力性というものは、数学的な定義やこれまでの議論で明かなように、グラフ上では比較が困難であったが、上記で示した条件が満される場合は、グラフの傾きのみで、贅沢品 (需要の価格弾力性が大きい) とか必需品 (需要の価格弾力性が 0 に近い) とかの議論をしても構わないことが分かる。逆にそれ以外の場合は、一般的には弾力性をグラフ上では比較できないので、留意すべきであろう。

参考文献

[1] R. G. D. Allen and A. P. Lerner. The concept of arc elasticity of demand. *The Review of Economic Studies*, Vol. 1, No. 3, pp. 226–230, 1934.

[2] 榎本弘. 現代価格理論の基礎構造ーミクロ経済学原理ー. 好学社, 1972.

[3] Luis Francisco Gómez López. The concept of elasticity and strategies for teaching it in introductory courses of economics. *Semestre Económico*, Vol. 22, No. 51, p. 149–167, abr. 2019.

[4] 林貴志. ミクロ経済学 増補版. ミネルヴァ書房, 2013(初版 2009).

[5] 林敏彦. ミクロ経済学. スタンダード経済学シリーズ. 東洋経済新報社, 1984.

[6] Jack Hirshleifer and Amihai Glazer. *Price theory and applications :Fifth Edition*. Prentice-Hall, 1992.

[7] 久武雅夫, 巽博一. 価格理論＜改訂＞. 現代経済学全集 3. 春秋社, 1960(初版

1955).

[8] 稲熊利和. 米の生産調整見直しをめぐる課題― 過剰作付・米価下落への備え―. 立法と調査, No. 354, pp. 33–42, 2015.

[9] 環境省. 騒音に係る環境基準の評価マニュアル 一般地域編, 2015.

[10] 小山昭雄. 線形代数と位相 (下). 経済数学教室 4. 岩波書店, 1994.

[11] 小山昭雄. ダイナミックシステム (上). 経済数学教室 7. 岩波書店, 1995.

[12] 小山昭雄. 微分積分の基礎 (上). 経済数学教室 5. 岩波書店, 1995.

[13] 前田修也. [研究ノート] ローレンツ曲線と弾力性. 東北学院大学論集. 経済学, No. 104, pp. 195–212, 1987.

[14] N. グレゴリーマンキュー. マンキュー経済学 I ミクロ編（第４版）. 第 1 巻. 東洋経済新報社, 2019.

[15] Alfred Marshall. *Principles of economics*. London: Mac-Millan, 1890.

[16] 三上真寛. ミクロ経済学: 基礎へのアプローチ. 学文社, 2020.

[17] 杉浦光夫. 基礎数学 2 解析入門 I, 第 2 巻. 東京大学出版会, 1980.

[18] 諸富徹, 宇野重規, 愛敬浩二, 鳥畑与一, 森裕之, 野田昌吾, 山崎圭一, 新井浩, 石塚誠. 7 実教 政経 詳述政治・経済. 実教出版, 2025.

[19] 国立研究開発法人産業技術総合研究所計量標準総合センター. 国際単位系（SI）基本単位の定義改定と計量標準, 3 月 2020.

[20] 武隈慎一. ミクロ経済学. 新経済学ライブラリ 4. 新世社 (サイエンス社 (発売)), 1989.